Clase 1: Funciones de Varias Variables

C. J. Vanegas

28 de abril de 2010

1. La geometría de funciones con valores reales

Considere la siguiente función:

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\overline{x} \in A \longmapsto f(\overline{x})$$

donde $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$.

- si $m > 1$, decimos que f es una función con valores vectoriales.
- si $m = 1$, decimos que f es una función con valores reales (o escalares).
- si $n > 1$, decimos que f es una función de varias variables.

Ejemplo 1.

1.

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$$

es una función de dos variables con valores reales.

2.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \longmapsto (xyz, x + y + z)$$

es una función de tres variables con valores vectoriales.

Las funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ aparecen en diversos problemas de las ciencias, sobre todo en la física, como por ejemplo:

a) Temperatura:

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \longmapsto T(x, y, z)$$

b) Trayectoria:

$$\mathrm{X} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \mathrm{X}(t) = (\mathrm{X}_1(t), \mathrm{X}_2(t), \mathrm{X}_3(t)).$$

Estamos interesados en visualizar funciones de n-variables con valores reales. Esto lo podemos hacer para $n = 2$ y en parte para $n = 3$. Vamos a necesitar entonces las nociones de *gráfica* y de *conjuntos de nivel*.

2. Gráfica de una función

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

I) Si $n = 1$, definimos la gráfica de f como:

$$Graf(f) = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\right\}$$

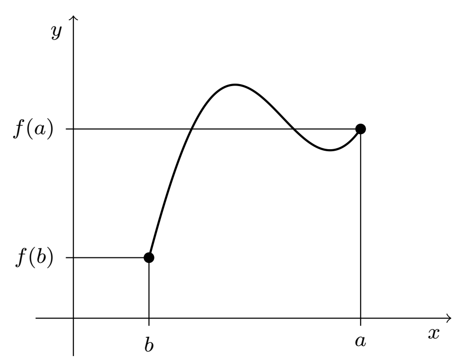

Figura 1: Gráfica de una función

II) Si $n > 1$,

$$Graf(f) = \left\{ (x_1, ..., x_n) : f(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ con } (x_1, ..., x_n) \in A \right\}.$$

para visualizar la gráfica necesitamos los **Conjuntos de nivel**, que son subconjuntos de A en los cuales f es constante.

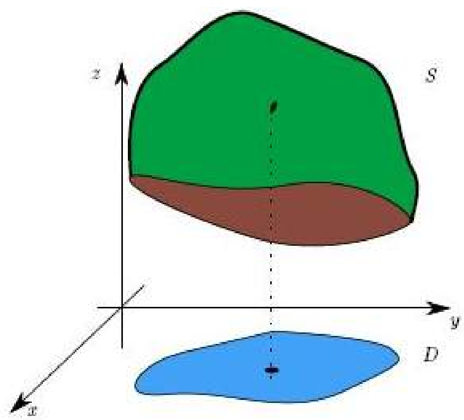

Figura 2: Esquema de la gráfica de una función $f(x, y) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, observe que en este caso la gráfica de $f(x, y)$ se encuentra en $\mathbb{R}^3$

Si $n = 2$ el conjunto de nivel recibe el nombre de **curva de nivel**. La palabra **nivel** surge del hecho de que podemos interpretar $f(x, y) = c$ como la proyección sobre el plano xy de la curva intersección de $z = f(x, y)$ y el plano $z = c$ llamado plano horizontal o de nivel.

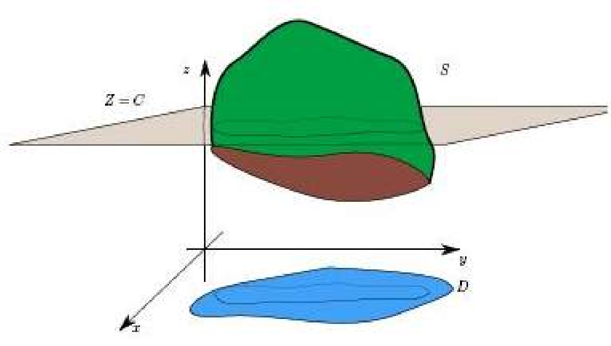

Figura 3: Esquema de las curvas de nivel, observe la intersección de la superficie generada por la gráfica de la función $f(x, y)$ con el plano $z = c$.

Ejemplo 2. *1.* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\},\ f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$

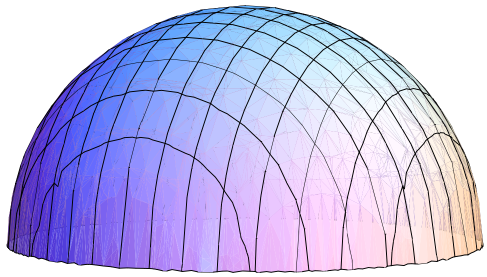

Figura 4: $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

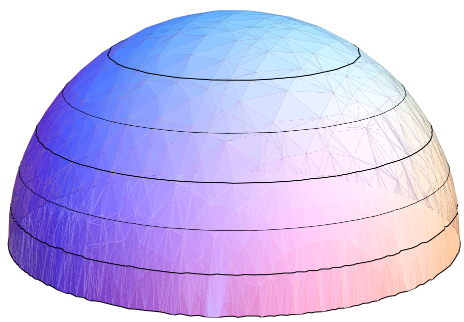

Figura 5: Curvas de nivel para $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

- *Si* $c = 0$, $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = 0 \iff 9 - x^2 - y^2 = 0 \iff x^2 + y^2 = 9$, *(circulo de radio* 3*).*
- *Si* $c = 1$, $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = 1 \iff 9 - x^2 - y^2 = 1 \iff x^2 + y^2 = 8$, *(circulo de radio* $\sqrt{8}$*).*
- *En general, si* $c = k > 0$, $\quad 9 - x^2 - y^2 = k^2 \iff x^2 + y^2 = 9 - k^2$ *y* $k \leq 3$*(circulo de radio* $\sqrt{9 - k^2}$*). Notese que si* $c = k > 3$ *no hay curvas de nivel.*
- $c = 3 \quad 9 - x^2 - y^2 = 9 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0.$ *(el punto* $(0, 0)$*)*

2. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x, y) = k,$ *con* k *una constante fija.*

Curvas de nivel: $f(x, y) = c$, *si* $c = k$ *es todo el plano y si* $c \neq k$ *no hay curvas de nivel.*

3. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$.

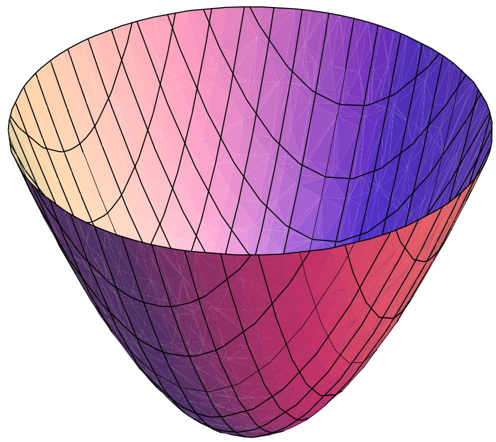

Figura 6: $f(x,y) = x^2 + y^2$

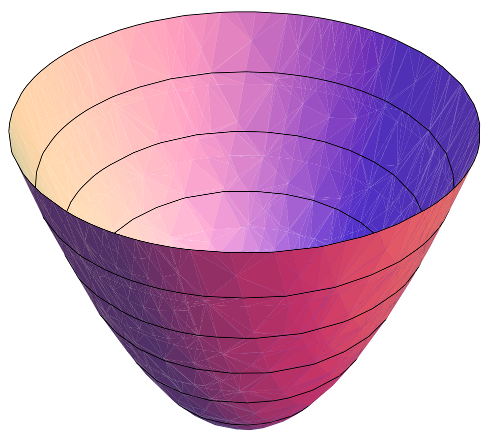

Figura 7: Curvas de nivel para $f(x,y) = x^2 + y^2$

a) *Son círculos de centro* $(0,0)$ *y radio* $\sqrt{c}$*, si* $c > 0$.

b) *El punto* $(0,0)$*, si* $c = 0$.

c) *Vacío, si* $c < 0$

Observación 1. *En ocasiones resulta conveniente cortar la superficie $z = f(x, y)$ con planos y estudiar el tipo de curvas así resultantes, por ejemplo si cortamos $z = x^2 + y^2$ con el plano $x = 0$ nos queda la parábola $z = y^2$ en el plano zy y si cortamos con el plano $y = 0$ nos queda la parábola $z = x^2$ en el plano zx.*

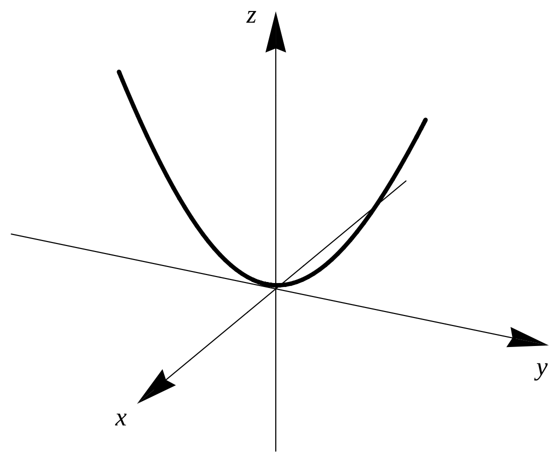

Figura 8: Corte de la función $z = x^2 + y^2$ con el plano $x = 0$, obteniendo las parábolas $z = y^2$

4. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by + d$

   Curvas de nivel: $ax + by + d = c \Rightarrow ax + by = c - d \Rightarrow y = \frac{-a}{b}x + \frac{c-d}{b}$, $\quad b \neq 0$ *son rectas de pendiente* $\frac{-a}{b}$ *y corte con el eje* y *en* $\frac{c-d}{b}$.

   La gráfica de f *es un plano que pasa por* $(0, 0, d)$ *y vector normal* $(a, b, -1)$

5. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

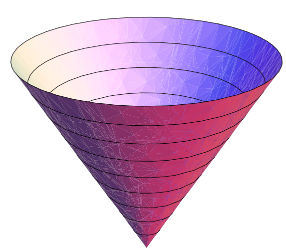

Figura 9: Curvas de nivel para $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

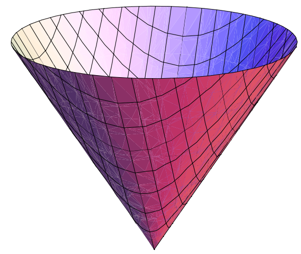

Figura 10: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

a) *Son círculos de radio c, si* $c > 0$.

b) *Es el punto* $(0, 0)$, *si* $c = 0$.

c) *Es Vacío, si* $c < 0$.

Si $y = 0 \Rightarrow f(x, y) = z = \sqrt{x^2} = \mid x \mid$.
Si $x = 0 \Rightarrow f(x, y) = z = \sqrt{y^2} = \mid y \mid$. ***ver figura 11***
Si $y = hx \Rightarrow f(x, y) = z = \sqrt{(1 + h^2)x^2} = \sqrt{1 + h^2} \mid x \mid$.

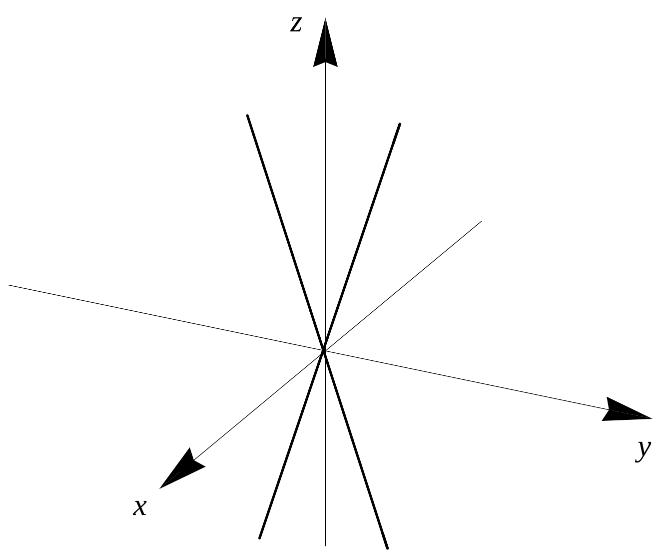

Figura 11: Si $x = 0 \Rightarrow f(x, y) = z = \sqrt{y^2} = \mid y \mid$

6. $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y)=x^2-y^2$

Curvas de nivel: ***(ver figuras(12 y 13)***

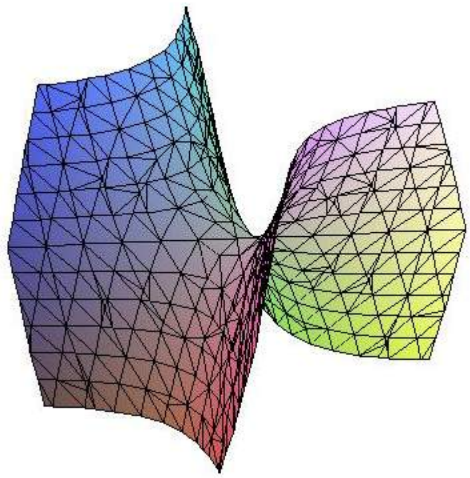

Figura 12: $f(x,y)=x^2-y^2$

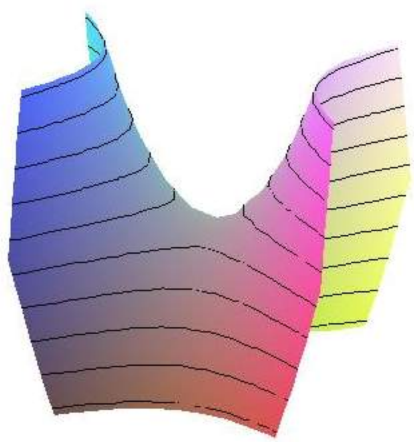

Figura 13: Curvas de nivel para $f(x,y)=x^2-y^2$

a) *si* $c>0$*, entonces las curvas de nivel son hipérbolas del tipo* $x^2-y^2=c$

b) *si* $c<0$*, entonces las curvas de nivel son hipérbolas del tipo* $-x^2+y^2=-c$

c) *si* $c=0$ *entonces* $x^2-y^2=0 \Rightarrow (x-y)(x+y)=0$ *son dos rectas que se cortan en el* *origen*

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$

si $y = 0 \Rightarrow z = x^2$ *entonces tenemos una parábola que abre hacia arriba.*

si $x = 0 \Rightarrow z = -y^2$ *entonces tenemos una parábola que abre hacia abajo.*

Observación 2. *si* $n = 3$ *el conjunto de nivel recibe el nombre de* **superficie de nivel**. *En este caso no podemos visualizar la gráfica de la función pues esta pertenece a* $\mathbb{R}^4$.

Ejemplo 3.

1. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
   Superficies de nivel: $x^2 + y^2 + z^2 = c$

   a) *Esferas de radio* $\sqrt{c}$ *y con centro en* $(0, 0, 0)$, *si* $c > 0$.

   b) *Es el punto* $(0, 0, 0)$ *si* $c = 0$.

   c) *Es Vacío si* $c < 0$.

2. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \frac{x^2+y^2}{z}$, *con* $z \neq 0$
   Superficies de nivel: $\frac{x^2+y^2}{z} = c \Rightarrow x^2 + y^2 = cz$ *a estas superficies se les conoce con el nombre de paraboloides de revolución.*

Ejemplo 4. *Mas ejemplos interesantes:*

- *Función* $f(x, y) = \sin(xy)$, $x, y \in [-\pi, \pi]$ $[-\pi, \pi]$ ***ver figuras (15, 14 y 16)***

- *Función* $g(x, y) = x^3 + y^3 + z^3 + 1 = (x + y + z + 1)^3$ *con dominio* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (x + y + z + 1)^3 \neq 0\}$. ***ver figuras (17, 18 y 19)***

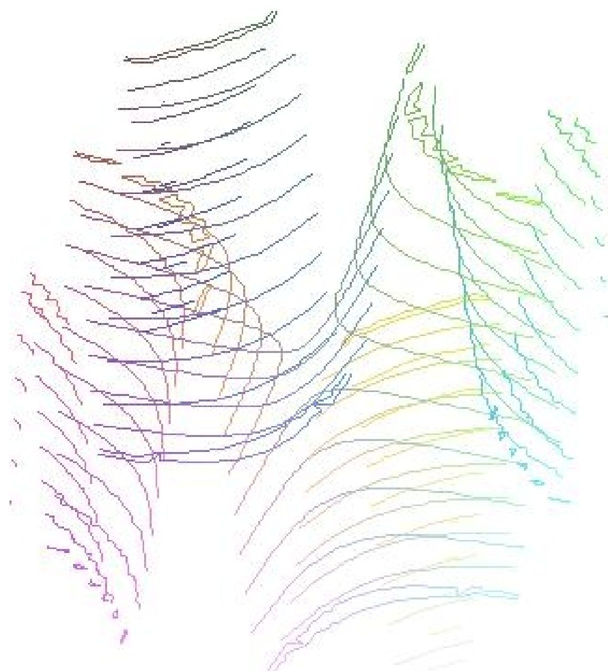

Figura 14: Curvas de nivel para $f(x, y) = \sin(xy)$ vista1

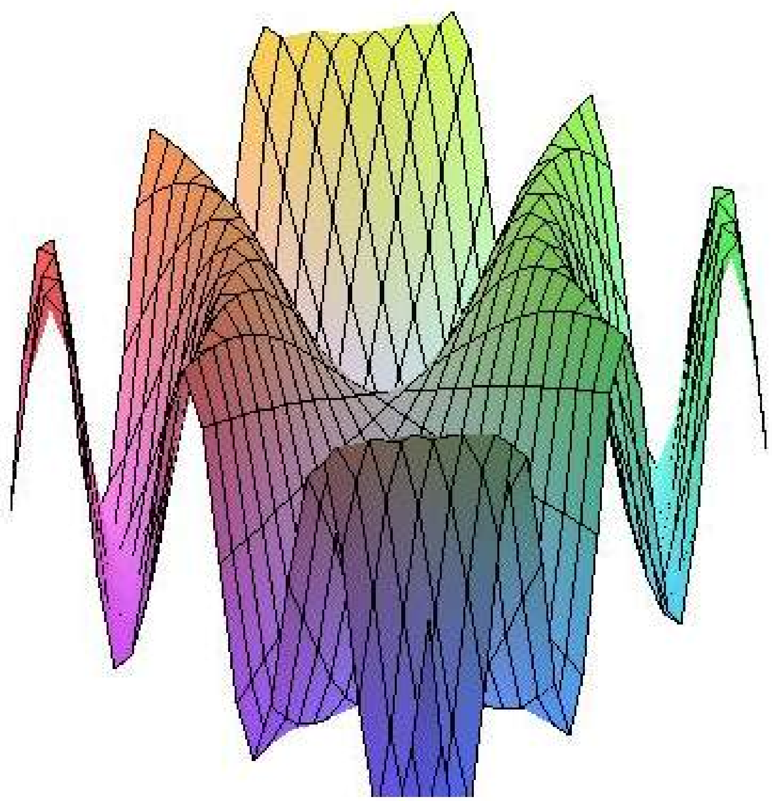

Figura 15: $f(x, y) = \sin(xy)$

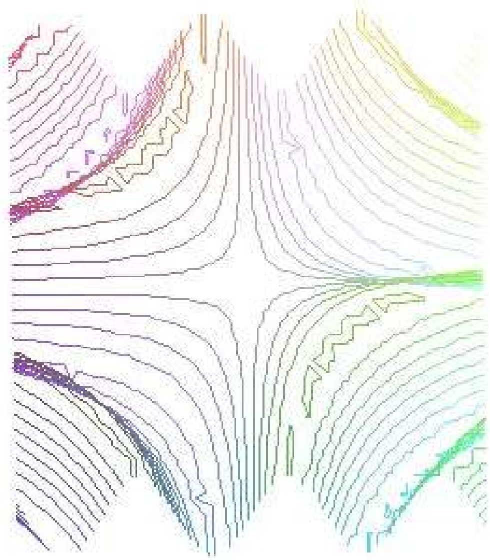

Figura 16: Curvas de nivel para $f(x,y) = \sin(xy)$ vista2

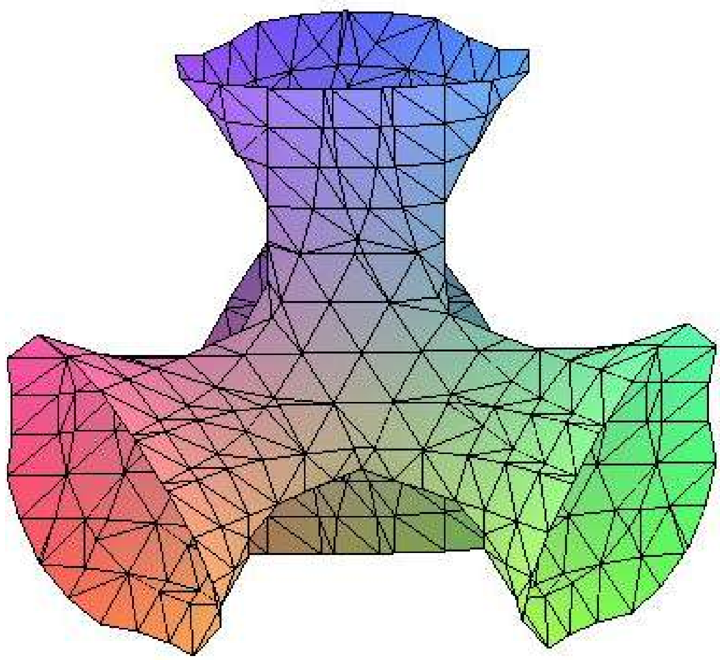

Figura 17: Vista 1 $g(x, y) = x^3 + y^3 + z^3 + 1 = (x + y + z + 1)^3$

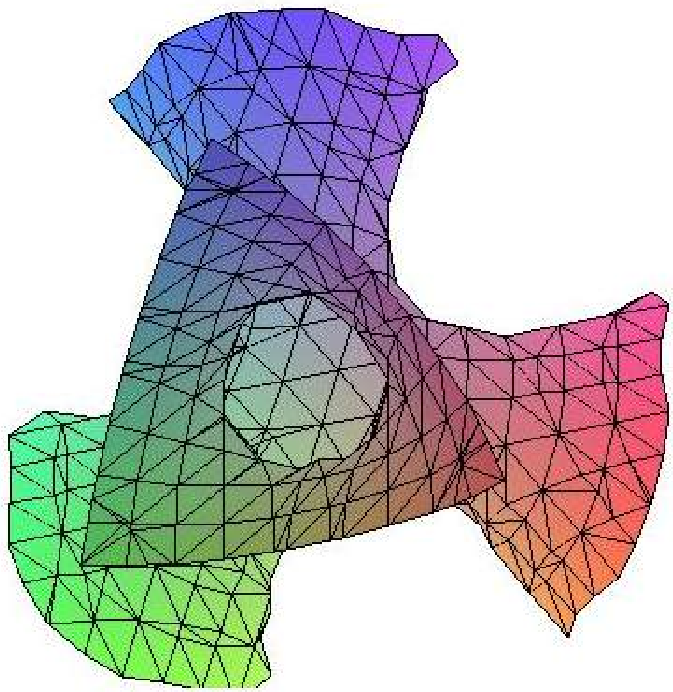

Figura 18: Vista 2 $g(x,y) = x^3 + y^3 + z^3 + 1 = (x+y+z+1)^3$

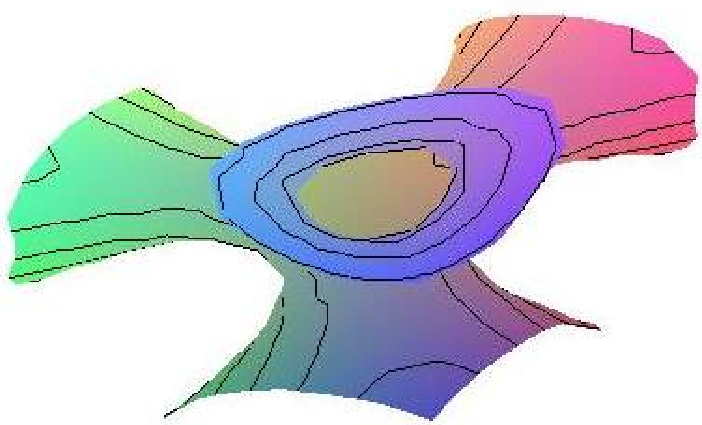

Figura 19: Curvas de nivel para $g(x,y) = x^3 + y^3 + z^3 + 1 = (x+y+z+1)^3$